

# PROBLEMAS

Emplee funciones de singularidad para resolver los siguientes problemas y suponga que la rigidez a flexión  $EI$  de cada viga es constante.

**9.35 y 9.36** Para la viga y la carga mostradas en las figuras, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el extremo *A*, *c*) la deflexión en el punto *C*.

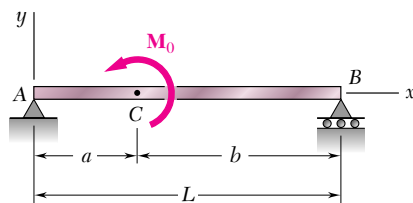


Figura P9.35

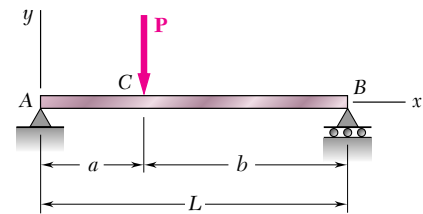


Figura P9.36

**9.37 y 9.38** Para la viga y la carga representadas, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el extremo libre, *c*) la deflexión del extremo libre.

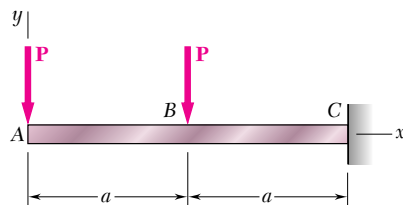


Figura P9.37

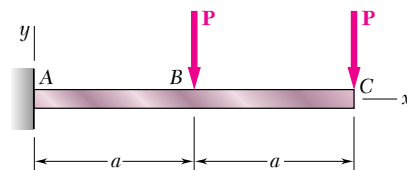


Figura P9.38

**9.39 y 9.40** Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto *B*, *c*) la deflexión en el extremo *D*.

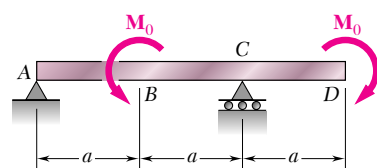


Figura P9.39

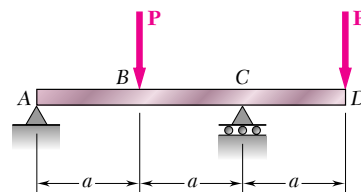


Figura P9.40

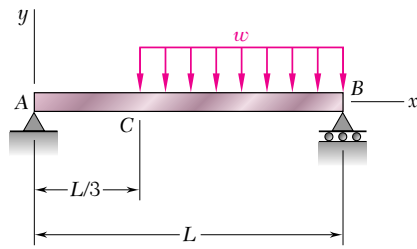


Figura P9.41

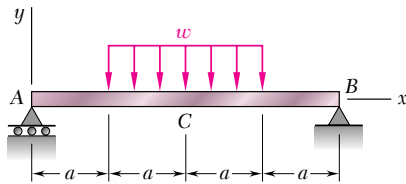


Figura P9.43

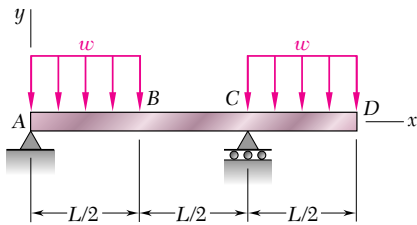


Figura P9.44

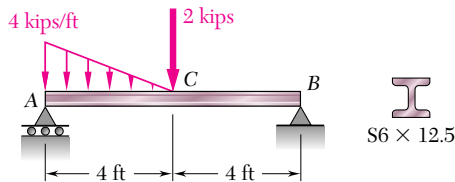


Figura P9.46

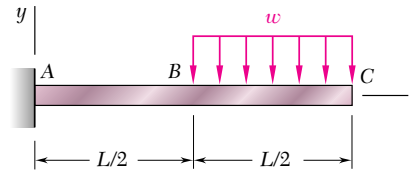


Figura P9.42

9.41 Para la viga y la carga mostradas en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la pendiente en el punto A, *c*) la deflexión en el punto C.

9.42 Para la viga y la carga mostradas en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la deflexión en el punto B, *c*) la deflexión en el punto C.

9.43 Para la viga y la carga mostradas en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la deflexión en el punto medio C.

9.44 Para la viga y la carga representadas en la figura, determine *a*) la ecuación de la curva elástica, *b*) la deflexión en el punto B, *c*) la deflexión en el punto D.

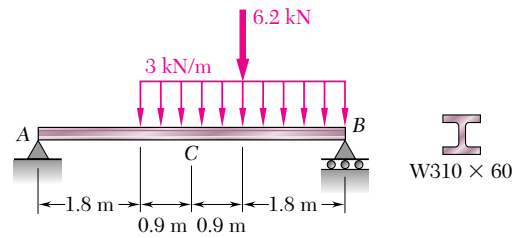


Figura P9.45

9.45 Para la viga y la carga ilustradas en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo A, *b*) la deflexión en el punto medio C. Utilice  $E = 200 \text{ GPa}$ .

9.46 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo A, *b*) la deflexión en el punto medio C. Utilice  $E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$ .

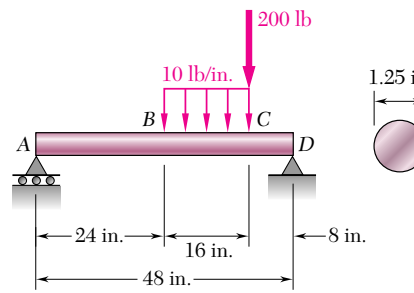


Figura P9.47

9.47 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo A, *b*) la deflexión en el punto B. Utilice  $E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$ .

9.48 Para la viga de madera y la carga mostradas en la figura, determine *a*) la pendiente en el extremo *A*, *b*) la deflexión en el punto medio *C*. Utilice  $E = 12 \text{ GPa}$ .

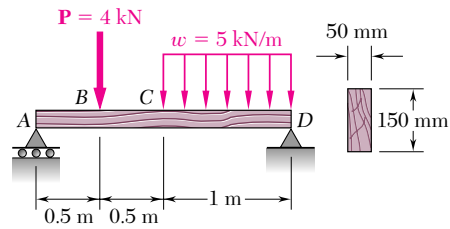


Figura P9.48

9.49 y 9.50 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la reacción en el apoyo deslizante, *b*) la deflexión en el punto *C*.

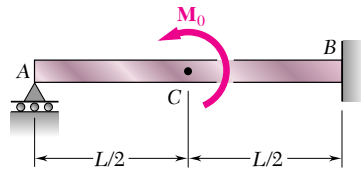


Figura P9.49

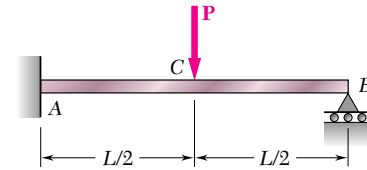


Figura P9.50

9.51 y 9.52 Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine *a*) la reacción en el apoyo deslizante, *b*) la deflexión en el punto *B*.

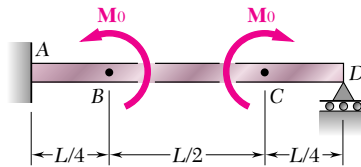


Figura P9.51

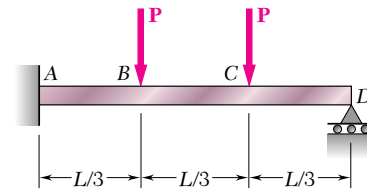


Figura P9.52

9.53 Para la viga y la carga que se ilustran en la figura, determine *a*) la reacción en el punto *C*, *b*) la deflexión en el punto *B*. Utilice  $E = 200 \text{ GPa}$ .

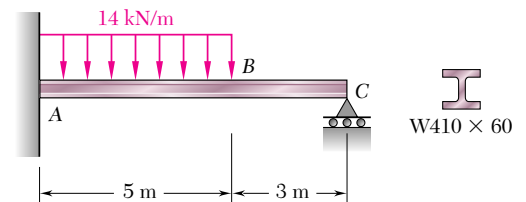


Figura P9.53

9.54 y 9.55 Para la viga y carga que se ilustran en la figura, determine *a*) la reacción en el punto *A*, *b*) la deflexión en el punto *C*. Utilice  $E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$ .

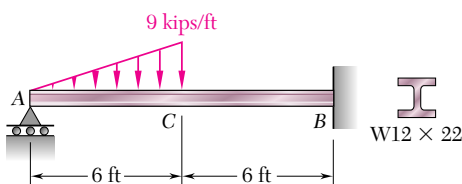


Figura P9.54

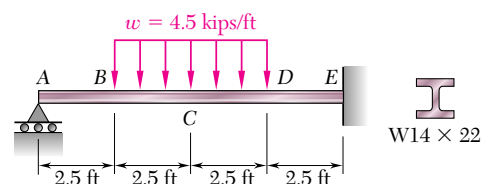


Figura P9.55

**558** Deflexión de vigas

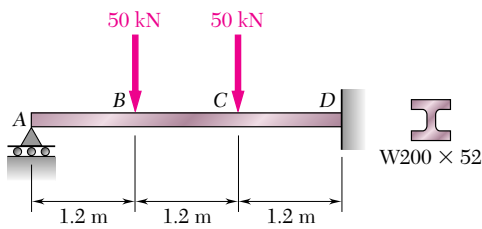


Figura P9.56

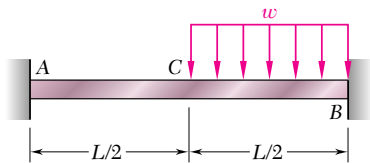


Figura P9.58

**9.56** Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la reacción en el punto A, *b*) la deflexión en el punto B. Utilice  $E = 200$  GPa.

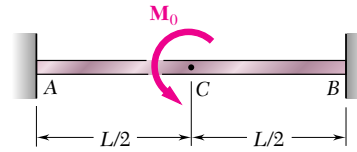


Figura P9.57

**9.57** Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la reacción en el punto A, *b*) la pendiente en el punto C.

**9.58** Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la reacción en el punto A, *b*) la deflexión en el punto medio C.

**9.59 a 9.62** Para la viga y la carga mostradas en cada figura, determine la magnitud y ubicación de la deflexión más grande hacia abajo.

**9.59** La viga y la carga del problema 9.45.

**9.60** La viga y la carga del problema 9.46.

**9.61** La viga y la carga del problema 9.47.

**9.62** La viga y la carga del problema 9.48.

**9.63** Las barras rígidas *BF* y *DH* están soldadas a la viga de acero laminado *AE*, como se muestra en la figura. Para la carga ilustrada, determine *a*) la deflexión en el punto B, *b*) la deflexión en el punto medio C de la viga. Utilice  $E = 200$  GPa.

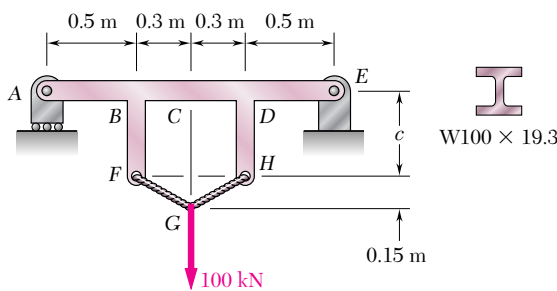


Figura P9.63

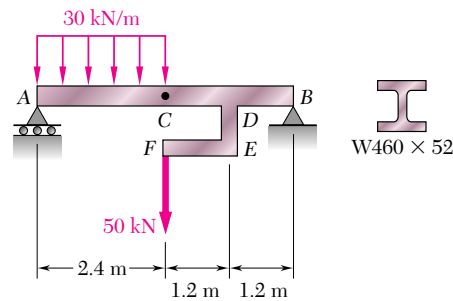


Figura P9.64

**9.64** La barra rígida *DEF* está soldada en el punto D a la viga de acero laminado *AB*. Para la carga que se ilustra en la figura, determine *a*) la pendiente en el punto A, *b*) la deflexión en el punto medio C de la viga. Utilice  $E = 200$  GPa.

## 9.7 MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN

Cuando una viga se somete a varias cargas concentradas o distribuidas, a menudo es conveniente calcular de manera separada la pendiente y la deflexión causadas por cada carga. La pendiente y la deflexión totales se obtienen aplicando el principio de superposición (vea la sección 2.12) y sumando los valores de la pendiente o la deflexión correspondiente a las diversas cargas.

### EJEMPLO 9.07

Determine la pendiente y deflexión en  $D$  para la viga y carga mostradas (figura 9.33), sabiendo que la rigidez a flexión de la viga es  $EI = 100 \text{ MN} \cdot \text{m}^2$ .

La pendiente y la deflexión en cualquier punto de la viga pueden obtenerse superponiendo las pendientes y deflexiones causadas respectivamente por la carga concentrada y por la carga distribuida (figura 9.34).

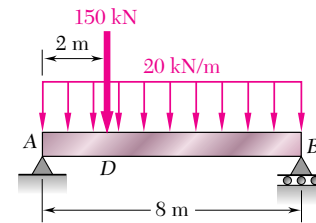


Figura 9.33

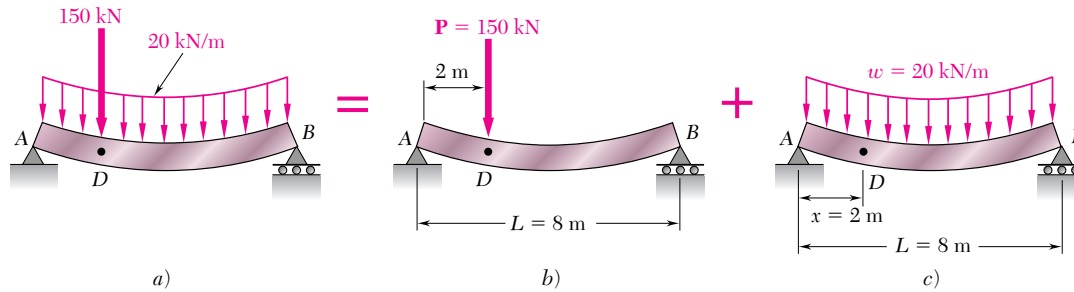


Figura 9.34

Como la carga concentrada en la figura 9.34b se aplica a un cuarto del claro, pueden usarse los resultados obtenidos para la viga y la carga del ejemplo 9.03 y escribirse

$$(\theta_D)_P = -\frac{PL^2}{32EI} = -\frac{(150 \times 10^3)(8)^2}{32(100 \times 10^6)} = -3 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$(y_D)_P = -\frac{3PL^3}{256EI} = -\frac{3(150 \times 10^3)(8)^3}{256(100 \times 10^6)} = -9 \times 10^{-3} \text{ m} = -9 \text{ mm}$$

Por otra parte, recordando la ecuación de la curva elástica obtenida para la carga uniformemente distribuida en el ejemplo 9.02, la deflexión en la figura 9.34c se expresa como:

$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \quad (9.50)$$

y diferenciando con respecto a  $x$ ,

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{24EI}(-4x^3 + 6Lx^2 - L^3) \quad (9.51)$$

Haciendo  $w = 20 \text{ kN/m}$ ,  $x = 2 \text{ m}$  y  $L = 8 \text{ m}$ , en las ecuaciones (9.51) y (9.50), se tiene

$$(\theta_D)_w = \frac{20 \times 10^3}{24(100 \times 10^6)}(-352) = -2.93 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$(y_D)_w = \frac{20 \times 10^3}{24(100 \times 10^6)}(-912) = -7.60 \times 10^{-3} \text{ m} = -7.60 \text{ mm}$$

Combinando las pendientes y deflexiones producidas por las cargas concentradas y distribuidas, se obtiene:

$$\theta_D = (\theta_D)_P + (\theta_D)_w = -3 \times 10^{-3} - 2.93 \times 10^{-3} = -5.93 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$y_D = (y_D)_P + (y_D)_w = -9 \text{ mm} - 7.60 \text{ mm} = -16.60 \text{ mm}$$

Para facilitar el trabajo de los ingenieros, los manuales de ingeniería estructural y mecánica incluyen tablas con las deflexiones y pendientes de vigas para diversas cargas y apoyos. En el apéndice D se encuentra una de estas tablas. Note que la pendiente y la deflexión de la viga de la figura 9.33 hubieran podido determinarse a partir de allí. Ciertamente, usando la información dada en los casos 5 y 6, pudo haberse expresado la deflexión de la viga para cualquier valor  $x \leq L/4$ . Tomando la derivada de la expresión así obtenida, se habría determinado la pendiente de la viga en el mismo intervalo. También se observa que la pendiente en los extremos de la viga puede obtenerse sumando los valores correspondientes de la tabla. Sin embargo, la



**Figura 9.35** Las vigas continuas que soportan este puente de autopista tiene tres soportes que son indeterminados.

deflexión máxima de la viga de la figura 9.33 *no puede* obtenerse sumando las deflexiones máximas de los casos 5 y 6, pues éstas ocurren en puntos diferentes de la viga.†

### 9.8 APLICACIÓN DE LA SUPERPOSICIÓN A VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

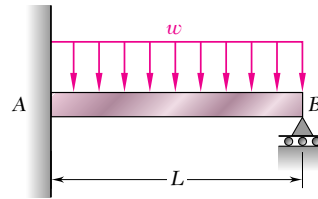
A menudo será útil el método de la superposición para determinar las reacciones en los apoyos de una viga estáticamente indeterminada. Considerando primero una viga indeterminada de primer grado (véase sección 9.5), como la que se muestra en la figura 9.35 se seguirá el método descrito en la sección 2.9. Se escoge una de las reacciones como redundante y se elimina o modifica el apoyo correspondiente. La reacción redundante se trata como una carga desconocida que, junto con las otras, debe producir deformaciones compatibles con los apoyos originales. La pendiente o la deflexión donde el apoyo se ha modificado o eliminado se obtiene calculando separadamente las deformaciones causadas por las cargas dadas y la reacción redundante, y superponiendo los resultados obtenidos. Una vez calculadas las reacciones en los apoyos, pueden determinarse la pendiente y la deflexión en cualquier punto de la viga.

† El valor aproximado de la deflexión máxima de la viga se obtiene elaborando la gráfica de los valores de  $y$  correspondientes a varios de  $x$ . La determinación de la localización exacta y magnitud de la deflexión máxima requiere igualar a cero la expresión de la pendiente y resolver esta ecuación para  $x$ .

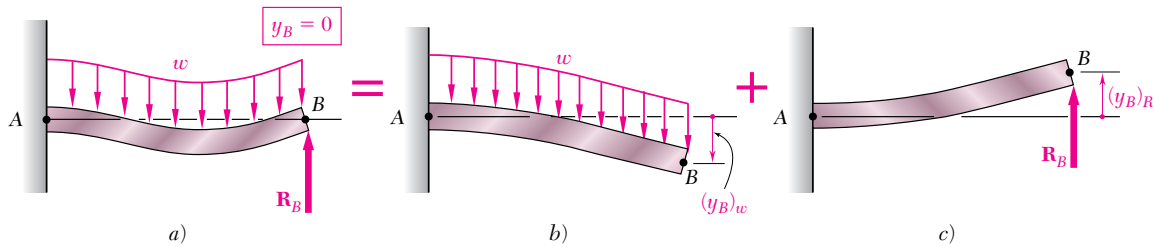
#### EJEMPLO 9.08

Determine las reacciones en los apoyos de la viga prismática y la carga mostradas en la figura 9.36. (Ésta es la misma viga del ejemplo 9.05 de la sección 9.5.)

La reacción en  $B$  se considera redundante y se libera la viga de ese apoyo. La reacción  $R_B$  se establece como una carga desconocida (figura 9.37a) y se obtendrá de la condición de que la deflexión de la viga en  $B$  debe ser cero.



**Figura 9.36**



**Figura 9.37**

La solución se efectúa tomando por separado la deflexión  $(y_B)_w$  producida en  $B$  por la carga uniformemente distribuida  $w$  (figura 9.37b) y la deflexión  $(y_B)_R$  producida en el mismo punto por la reacción redundante  $R_B$  (figura 9.37c).

De la tabla del apéndice D (casos 2 y 1) se halla que

$$(y_B)_w = -\frac{wL^4}{8EI} \quad (y_B)_R = +\frac{R_B L^3}{3EI}$$

Escribiendo que la deflexión en  $B$  es la suma de estas dos cantidades y que debe ser cero, se tiene

$$y_B = (y_B)_w + (y_B)_R = 0$$

$$y_B = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{R_B L^3}{3EI} = 0$$

y resolviendo para  $R_B$ ,  $R_B = \frac{3}{8}wL$   $R_B = \frac{3}{8}wL \uparrow$

Dibujando el diagrama de cuerpo libre de la viga (figura 9.38) y escribiendo las correspondientes ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$+\uparrow \sum F_y = 0: \quad R_A + R_B - wL = 0 \quad (9.52)$$

$$R_A = wL - R_B = wL - \frac{3}{8}wL = \frac{5}{8}wL$$

$$R_A = \frac{5}{8}wL \uparrow$$

$$+\curvearrowright \sum M_A = 0: \quad M_A + R_B L - (wL)(\frac{1}{2}L) = 0 \quad (9.53)$$

$$M_A = \frac{1}{2}wL^2 - R_B L = \frac{1}{2}wL^2 - \frac{3}{8}wL^2 = \frac{1}{8}wL^2$$

$$M_A = \frac{1}{8}wL^2 \curvearrowright$$

**Solución alternativa.** El par en el extremo empotrado  $A$  puede considerarse redundante y reemplazarse el extremo fijo por un apoyo de segundo género. El par  $M_A$  es ahora una carga desconocida (figura 9.39a) y se calculará de la condición de que la

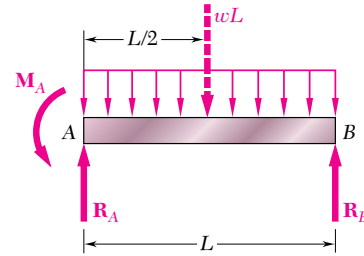


Figura 9.38

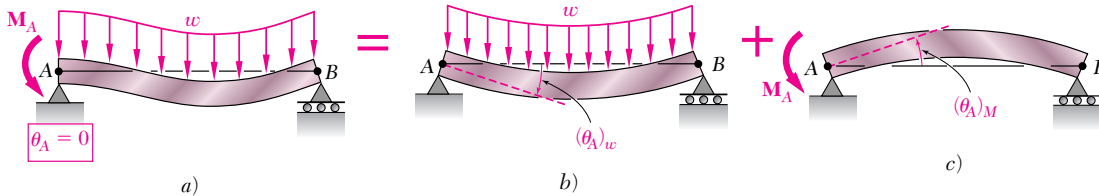


Figura 9.39

pendiente debe ser cero en el punto  $A$ . La solución se consigue considerando separadamente la pendiente  $(\theta_A)_w$  producida en  $A$  por la carga uniformemente distribuida  $w$  (figura 9.39b) y la pendiente  $(\theta_A)_M$  producida por el mismo punto por el par desconocido  $M_A$  (figura 9.39c).

Usando la tabla del apéndice D (casos 6 y 7) y observando que  $A$  y  $B$  deben intercambiarse en el caso 7, se halla que:

$$(\theta_A)_w = -\frac{wL^3}{24EI} \quad (\theta_A)_M = \frac{M_A L}{3EI}$$

Escribiendo que la pendiente en  $A$  es la suma de estas dos cantidades y que debe ser cero, se halla que:

$$\theta_A = (\theta_A)_w + (\theta_A)_M = 0$$

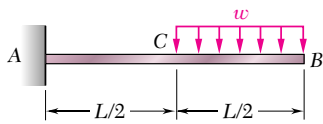
$$\theta_A = -\frac{wL^3}{24EI} + \frac{M_A L}{3EI} = 0$$

y, despejando a  $M_A$ ,

$$M_A = \frac{1}{8}wL^2 \quad M_A = \frac{1}{8}wL^2 \curvearrowright$$

Los valores  $R_A$  y  $R_B$  pueden encontrarse mediante las ecuaciones de equilibrio (9.52) y (9.53).

La viga estudiada en el ejemplo previo era indeterminada de primer grado. En el caso de una viga indeterminada de segundo grado (véase sección 9.5), dos reacciones deben designarse como redundantes y los soportes correspondientes eliminados y modificados como corresponda. Las reacciones redundantes se tratan entonces como cargas desconocidas que, simultáneamente con las otras cargas, deben producir deformaciones compatibles con los apoyos originales (véase problema modelo 9.9).

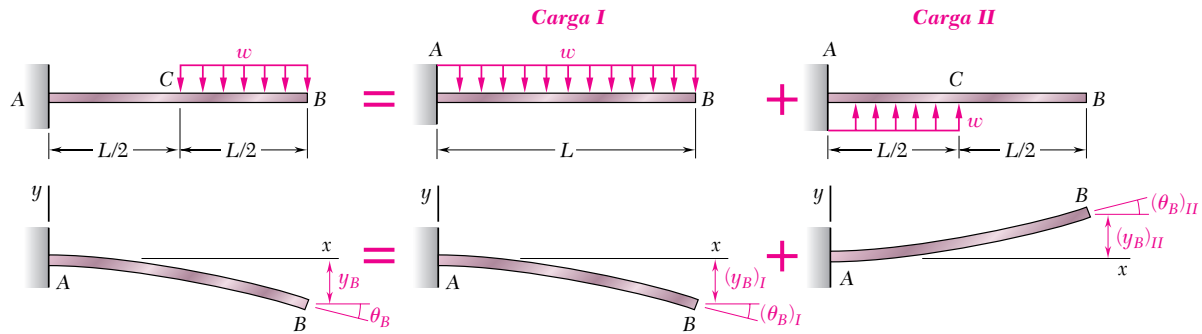


### PROBLEMA MODELO 9.7

Para la viga y carga mostradas en la figura, determine la pendiente y la deflexión del punto B.

### SOLUCIÓN

**Principio de superposición.** La carga dada puede obtenerse superponiendo las cargas mostradas en la siguiente “película de ecuación de carga”. La viga AB es, naturalmente, la misma en cada parte de la figura.



Para cada una de las cargas I y II, la pendiente y la deflexión en B se determinan usando la tabla de *Deflexiones y pendientes de viga* del apéndice D.

#### Carga I

$$(\theta_B)_I = -\frac{wL^3}{6EI} \qquad (y_B)_I = -\frac{wL^4}{8EI}$$

#### Carga II

$$(\theta_C)_{II} = +\frac{w(L/2)^3}{6EI} = +\frac{wL^3}{48EI} \qquad (y_C)_{II} = +\frac{w(L/2)^4}{8EI} = +\frac{wL^4}{128EI}$$

En la porción CB, el momento flector para la carga II es cero y, por tanto, la curva elástica es una línea recta.

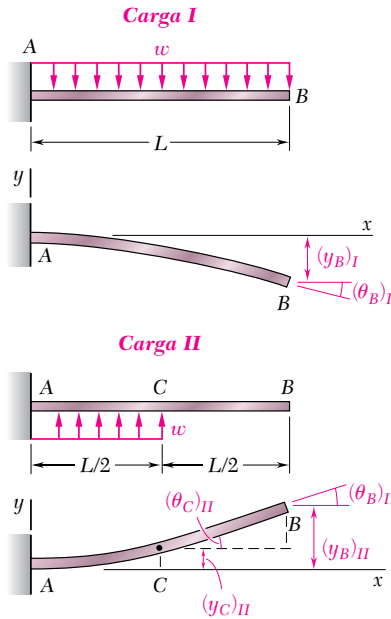
$$\begin{aligned} (\theta_B)_{II} &= (\theta_C)_{II} = +\frac{wL^3}{48EI} & (y_B)_{II} &= (y_C)_{II} + (\theta_C)_{II}\left(\frac{L}{2}\right) \\ & & &= \frac{wL^4}{128EI} + \frac{wL^3}{48EI}\left(\frac{L}{2}\right) = +\frac{7wL^4}{384EI} \end{aligned}$$

#### Pendiente en el punto B

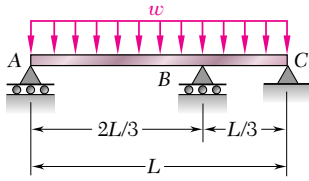
$$\theta_B = (\theta_B)_I + (\theta_B)_{II} = -\frac{wL^3}{6EI} + \frac{wL^3}{48EI} = -\frac{7wL^3}{48EI} \quad \theta_B = \frac{7wL^3}{48EI} \quad \leftarrow$$

#### Deflexión en B

$$y_B = (y_B)_I + (y_B)_{II} = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{7wL^4}{384EI} = -\frac{41wL^4}{384EI} \quad y_B = \frac{41wL^4}{384EI} \quad \downarrow$$





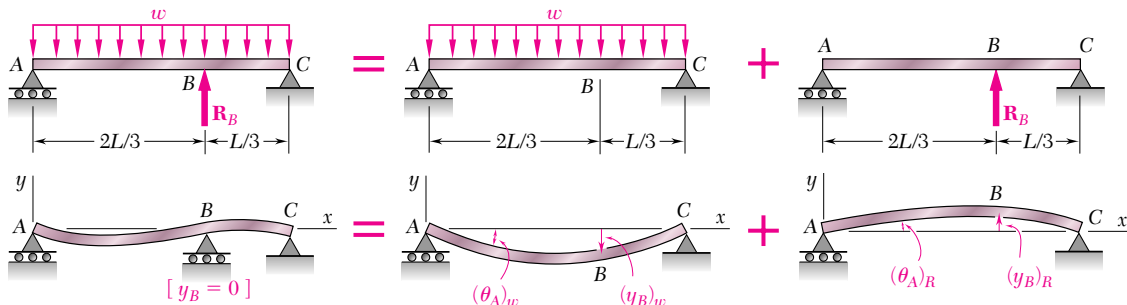


## PROBLEMA MODELO 9.8

Para la viga y carga mostradas en la figura, halle a) la reacción de cada apoyo, b) la pendiente en el extremo A.

## SOLUCIÓN

**Principio de superposición.** La reacción  $R_B$  se escoge como redundante y se considera como carga desconocida. Las deflexiones debidas a la carga distribuida y a la reacción  $R_B$  se examinan separadamente, como se indica en la figura.



Para cada carga, la deflexión en el punto B se halla usando la tabla de *deflexiones y pendientes de viga* del apéndice D.

**Carga distribuida.** Se utiliza el caso 6 del apéndice D

$$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

En el punto B,  $x = \frac{2}{3}L$ :

$$(y_B)_w = -\frac{w}{24EI}\left[\left(\frac{2}{3}L\right)^4 - 2L\left(\frac{2}{3}L\right)^3 + L^3\left(\frac{2}{3}L\right)\right] = -0.01132\frac{wL^4}{EI}$$

**Carga por la reacción redundante.** Del caso 5, apéndice D, con  $a = \frac{2}{3}L$  y  $b = \frac{1}{3}L$ , se tiene

$$(y_B)_R = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL} = +\frac{R_B}{3EIL}\left(\frac{2}{3}L\right)^2\left(\frac{L}{3}\right)^2 = 0.01646\frac{R_B L^3}{EI}$$

**a. Reacciones de los apoyos.** Recordando que  $y_B = 0$ , se tiene

$$y_B = (y_B)_w + (y_B)_R$$

$$0 = -0.01132\frac{wL^4}{EI} + 0.01646\frac{R_B L^3}{EI} \quad R_B = 0.688wL \uparrow \blacktriangleleft$$

Como la reacción  $R_B$  ahora es conocida, se utiliza el método de la estática para determinar las otras reacciones:  $R_A = 0.271wL \uparrow$   $R_C = 0.0413wL \uparrow \blacktriangleleft$

**b. Pendiente en el extremo A.** Refiriéndose de nuevo al apéndice D, se tiene

$$\text{Carga distribuida. } (\theta_A)_w = -\frac{wL^3}{24EI} = -0.04167\frac{wL^3}{EI}$$

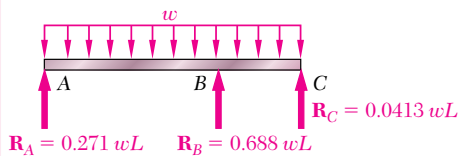
**Carga de reacción redundante.** Para  $P = -R_B = -0.688wL$  y  $b = \frac{1}{3}L$

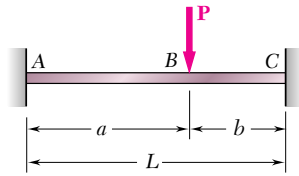
$$(\theta_A)_R = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL} = +\frac{0.688wL}{6EIL}\left(\frac{L}{3}\right)\left[L^2 - \left(\frac{L}{3}\right)^2\right] \quad (\theta_A)_R = 0.03398\frac{wL^3}{EI}$$

Finalmente,  $\theta_A = (\theta_A)_w + (\theta_A)_R$

$$\theta_A = -0.04167\frac{wL^3}{EI} + 0.03398\frac{wL^3}{EI} = -0.00769\frac{wL^3}{EI}$$

$$\theta_A = 0.00769\frac{wL^3}{EI} \searrow \blacktriangleleft$$



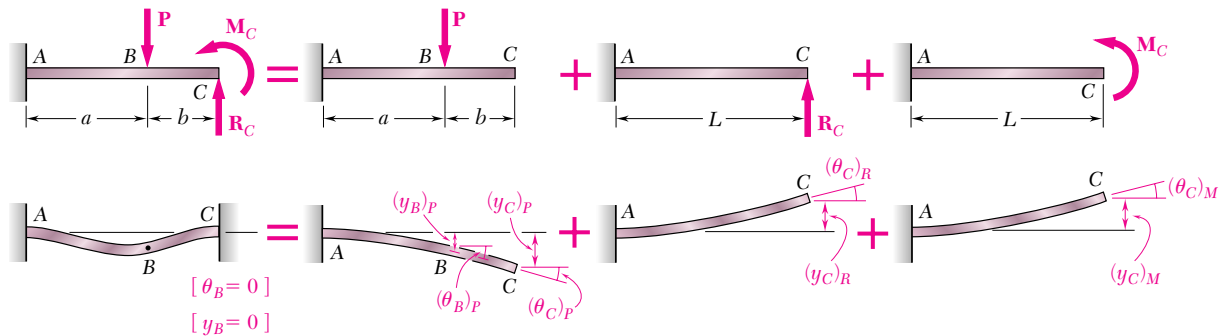


### PROBLEMA MODELO 9.9

Para la viga y carga mostradas, determine la reacción en el empotramiento C.

### SOLUCIÓN

**Principio de superposición.** Suponiendo que la carga axial en la viga es cero, la viga ABC es indeterminada de segundo grado y se escogen como redundantes la fuerza vertical  $R_C$  y el par  $M_C$ . Las deformaciones producidas por la carga P, la fuerza  $R_C$  y el par  $M_C$  se consideran separadamente como se muestra.



Para cada carga, la pendiente y la deflexión en C se encuentran en la tabla *Deflexiones y pendientes de viga* del apéndice D.

**Carga P.** Se observa que, para esta carga, la porción BC de la viga es recta.

$$\begin{aligned}
 (\theta_C)_P = (\theta_B)_P &= -\frac{Pa^2}{2EI} & (y_C)_P &= (y_B)_P + (\theta_B)_P b \\
 & & &= -\frac{Pa^3}{3EI} - \frac{Pa^2}{2EI}b = -\frac{Pa^2}{6EI}(2a + 3b)
 \end{aligned}$$

$$\text{Fuerza } R_C \quad (\theta_C)_R = +\frac{R_C L^2}{2EI} \quad (y_C)_R = +\frac{R_C L^3}{3EI}$$

$$\text{Par } M_C \quad (\theta_C)_M = +\frac{M_C L}{EI} \quad (y_C)_M = +\frac{M_C L^2}{2EI}$$

**Condiciones de frontera.** En el extremo C la pendiente y la deflexión deben ser cero.

$$\begin{aligned}
 [x = L, \theta_C = 0]: \quad \theta_C &= (\theta_C)_P + (\theta_C)_R + (\theta_C)_M \\
 0 &= -\frac{Pa^2}{2EI} + \frac{R_C L^2}{2EI} + \frac{M_C L}{EI} \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [x = L, y_C = 0]: \quad y_C &= (y_C)_P + (y_C)_R + (y_C)_M \\
 0 &= -\frac{Pa^2}{6EI}(2a + 3b) + \frac{R_C L^3}{3EI} + \frac{M_C L^2}{2EI} \quad (2)
 \end{aligned}$$

**Componentes de la reacción en C.** Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1) y (2) se encuentran las reducciones

$$R_C = +\frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b) \quad R_C = \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b) \uparrow \blacktriangleleft$$

$$M_C = -\frac{Pa^2 b}{L^2} \quad M_C = \frac{Pa^2 b}{L^2} \downarrow \blacktriangleleft$$

La reacción en A puede hallarse ahora usando los métodos de estática.

